第四章　几个初等函数的性质

一、基础知识

1．指数函数及其性质：形如 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$的函数叫做指数函数，其定义域为R，值域为（0，+∞），当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数，当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为增函数，它的图象恒过定点（0，1）。

2．分数指数幂：$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}, a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}, a^{-n}=\frac{1}{a^n}, a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$。

3．对数函数及其性质：形如 $y=log_a x(a>0, a\neq 1)$的函数叫做对数函数，其定义域为（0，+∞），值域为 **R**，图象过定点（1，0）。当 $0<a<1$，$y=log_a x$ 为减函数，当 $a>1$ 时，$y=log_a x$ 为增函数。

4．对数的性质（$M>0, N>0$）；

1）$a^x=M\Leftrightarrow x=log_a M(a>0, a\neq 1)$；

2）$log_a(MN)= log_a M+ log_a N$；

3）$log_a\left(\frac{M}{N}\right)= log_a M- log_a N$；4）$log_a M^n=n\, log_a M$；，

5）$log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}log_a M$；6）$a^{log_a M}=M$; 7) $log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}(a,b,c>0, a, c\neq 1)$.

5. 函数 $y=x+\frac{a}{x}$（$a>0$）的单调递增区间是 $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right]$ 和 $\left[\sqrt{a},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left[-\sqrt{a},0\right)$ 和 $\left(0,\sqrt{a}\right]$。（请读者自己用定义证明）

6. 连续函数的性质：若 $a<b$, $f(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在（a,b）上至少有一个实根。

二、方法与例题

1．构造函数解题。

例 1　已知 $a, b, c\in(-1, 1)$，求证：$ab+bc+ca+1>0$.

【证明】设 $f(x)=(b+c)x+bc+1\ (x\in(-1, 1))$，则 $f(x)$是关于 x 的一次函数。

所以要证原不等式成立，只需证 $f(-1)>0$ 且 $f(1)>0$（因为$-1<a<1$）.

因为 $f(-1)=-(b+c)+bc+1=(1-b)(1-c)>0$，

$f(1)=b+c+bc+a=(1+b)(1+c)>0$，

所以 $f(a)>0$，即 $ab+bc+ca+1>0$.

例 2　（柯西不等式）若 $a_1, a_2,\cdots,a_n$ 是不全为 0 的实数，$b_1, b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}$，则（$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$）•（$\sum_{i=1}^{n}b_i^2$）$\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i)^2$，等号当且仅当存在 $\mu\in\mathbf{R}$，使 $a_i=\mu b_i$，$i=1, 2, \cdots, n$ 时成立。

【证明】　令 $f(x)=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)x^2-2(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i)x+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i x-b_i)^2$，

因为 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2>0$，且对任意 $x\in\mathbf{R}, f(x)\geqslant0$，

所以 $\triangle=4(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i)-4(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\leqslant0$.

展开得（$\sum_{i=1}^{n}a_i^2$）$(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i)^2$。

等号成立等价于 $f(x)=0$ 有实根，即存在 μ，使 $a_i=\mu b_i$，$i=1, 2, \cdots, n$。

例 3　设 $x, y\in \mathbf{R}^{+}, x+y=c$, c 为常数且 $c\in(0, 2]$，求 $u=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$ 的最小值。

【解】$u=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=xy+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}\geqslant xy+\frac{1}{xy}+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}$

$=xy+\frac{1}{xy}+2.$

令 $xy=t$，则 $0<t=xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{c^2}{4}$，设 $f(t)=t+\frac{1}{t}, 0<t\leqslant\frac{c^2}{4}$.

因为 $0<c\leqslant 2$，所以 $0<\frac{c^2}{4}\leqslant 1$，所以 $f(t)$ 在 $\left(0,\frac{c^2}{4}\right]$ 上单调递减。

所以 $f(t)_{min}=f(\frac{c^2}{4})=\frac{c^2}{4}+\frac{4}{c^2}$，所以 $u\geqslant\frac{c^2}{4}+\frac{4}{c^2}+2$.

当 $x=y=\frac{c}{2}$ 时，等号成立. 所以 u 的最小值为 $\frac{c^2}{4}+\frac{4}{c^2}+2$.

2．指数和对数的运算技巧。

例 4　设 $p, q\in \mathrm{R}^{+}$ 且满足 $log_9 p= log_{12} q= log_{16}(p+q)$，求 $\frac{q}{p}$ 的值。

【解】　令 $log_9 p= log_{12} q= log_{16}(p+q)=t$，则 $p=9^{t}$, $q=12^{t}$, $p+q=16^{t}$,

所以 $9^{t}+12^{t}=16^{t}$，即 $1+\left(\frac{4}{3}\right)^{t}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}$.

记 $x=\frac{q}{p}=\frac{12^t}{9^t}=\left(\frac{4}{3}\right)^{t}$，则 $1+x=x^2$，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

又 $\frac{q}{p}>0$，所以 $\frac{q}{p}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

例 5　对于正整数 $a, b, c(a\leqslant b\leqslant c)$和实数 x, y, z, w，若 $a^x=b^y=c^z=70^w$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$，求证：$a+b=c$.

【证明】　由 $a^x=b^y=c^z=70^w$ 取常用对数得 $xlga=ylgb=zlgc=wlg70$.

所以 $\frac{1}{w}lga=\frac{1}{x}lg70$, $\frac{1}{w}lgb=\frac{1}{y}lg70$, $\frac{1}{w}lgc=\frac{1}{z}lg70$，

相加得 $\frac{1}{w}(lga+lgb+lgc)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)lg70$，由题设 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$，

所以 $lga+lgb+lgc=lg70$，所以 $lgabc=lg70$.

所以 $abc=70=2\times5\times7$.

若 $a=1$，则因为 $xlga=wlg70$，所以 $w=0$ 与题设矛盾，所以 $a>1$.

又 $a\leqslant b\leqslant c$，且 a, b, c 为 70 的正约数，所以只有 $a=2, b=5, c=7$.

所以 $a+b=c$.

例 6　已知 $x\neq1, ac\neq1, a\neq1, c\neq1$. 且 $log_a x+log_c x=2log_b x$，求证 $c^2=(ac)^{logab}$.

【证明】　由题设 $log_a x+log_c x=2log_b x$，化为以 a 为底的对数，得

$$\log_a x+\frac{\log_a x}{\log_a c}=\frac{2\log_a x}{\log_a b},$$

因为 $ac>0, ac\neq1$，所以 $log_a b=log_{ac}c^2$，所以 $c^2=(ac)^{logab}$.

注：指数与对数式互化，取对数，换元，换底公式往往是解题的桥梁。

3．指数与对数方程的解法。

解此类方程的主要思想是通过指对数的运算和换元等进行化简求解。值得注意的是函数单调性的应用和未知数范围的讨论。

例 7　解方程：$3^x+4^x+5^x=6^x$.

【解】　方程可化为$\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x=1$。设 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数，因为 $f(3)=1$，所以方程只有一个解 $x=3$.

例 8　解方程组：$\begin{cases} x^{x+y}=y^{12} \\ y^{x+y}=x^3 \end{cases}$（其中 $x, y\in\mathbf{R}^+$）.

【解】　两边取对数，则原方程组可化为$\begin{cases} (x+y)\lg x=12\lg y \\ (x+y)\lg y=3glx \end{cases}$.　①②

把①代入②得$(x+y)2lgx=36lgx$，所以$[(x+y)^2-36]lgx=0$.

由 $lgx=0$ 得 $x=1$，由$(x+y)^2-36=0(x, y\in\mathbf{R}^+)$得 $x+y=6$，

代入①得 $lgx=2lgy$，即 $x=y^2$，所以 $y^2+y-6=0$.

又 $y>0$，所以 $y=2, x=4$.

所以方程组的解为$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases};\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=2 \end{cases}$.

例 9　已知 $a>0, a\neq 1$，试求使方程 $log_a(x-ak)=log_{a^2}(x^2-a^2)$有解的 k 的取值范围。

【解】由对数性质知，原方程的解 x 应满足$\begin{cases} (x-ak)^2=x^2-a^2 \\ x-ak>0 \\ x^2-a^2>0 \end{cases}$.①②③

若①、②同时成立，则③必成立，

故只需解$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2\\ x-ak>0\end{cases}$.

由①可得 $2kx=a(1+k^2)$， ④

当 $k=0$ 时，④无解；当 $k\neq 0$ 时，④的解是 $x=\frac{a(1+k^2)}{2k}$，代入②得$\frac{1+k^2}{2k}>k$.

若 $k<0$，则 $k^2>1$，所以 $k<-1$；若 $k>0$，则 $k^2<1$，所以 $0<k<1$.

综上，当 $k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$时，原方程有解。

三、基础训练题

1．命题 p: “$(log_2 3)^x-(log_5 3)^x\geqslant(log_2 3)^{-y}-(log_5 3)^{-y}$”是命题 q:“$x+y\geqslant 0$”的_________条件。

2．如果 x_1 是方程 $x+lgx=27$ 的根，x_2 是方程 $x+10^x=27$ 的根，则 $x_1+x_2=$_________.

3．已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的增函数，点 A（-1，1），B（1，3）在它的图象上，$y=f^{-1}(x)$是它的反函数，则不等式$|f^{-1}(log_2 x)|<1$ 的解集为_________。

4．若 $log_{2a}\frac{1+a^2}{1+a}<0$，则 a 取值范围是_________。

5．命题 p: 函数 $y=log_2\left(x+\frac{a}{x}-3\right)$在[2，+∞）上是增函数；命题 q: 函数 $y=log_2(ax^2-4x+1)$的值域为 R，则 p 是 q 的_________条件。

6．若 $0<b<1$, $a>0$ 且 $a\neq 1$，比较大小：$|log_a(1-b)|$_________$|log_a(1+b)$.

7．已知 $f(x)=2+log_3x$, $x\in[1, 3]$，则函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$的值域为

_________。

8．若 $x=\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$，则与 x 最接近的整数是_________。

9．函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$的单调递增区间是_________。

10．函数 $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+5}\left(x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\right)$的值域为_________。

11．设 $f(x)=lg[1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x\cdot a]$，其中 n 为给定正整数, $n\geqslant 2$, $a\in\mathbf{R}$.若 $f(x)$在 $x\in(-\infty,1]$时有意义，求 a 的取值范围。

12．当 a 为何值时，方程 $\frac{\lg 2x}{\lg(x+a)}=2$ 有一解，二解，无解？

四、高考水平训练题

1．函数 $f(x)=\sqrt{\frac{8}{|x|}-1}+lg(x^2-1)$的定义域是_________.

2．已知不等式 $x^2-log_mx<0$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时恒成立，则 m 的取值范围是

_________.

3．若 $x\in\{x|log_2x=2^{-x}\}$，则 x^2, x, 1 从大到小排列是_________.

4. 若 $f(x)=ln\frac{1-x}{1+x}$，则使 $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$_________.

5. 命题 p: 函数 $y=log_2\left(x+\frac{a}{x}-3\right)$在[2，+∞）上是增函数；命题 q：函数 $y=log_2(ax^2-4x+1)$的值域为 $\mathbf{R}$，则 p 是 q 的________条件.

6．若 $0<b<1$, $a>0$ 且 $a\neq 1$，比较大小：$|log_a(1-b)|$ ________ $|log_a(1+b)|$.

7. 已知 $f(x)=2+log_3x$, $x\in[1, 3]$,则函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$的值域为________.

8．若 $x=\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$，则与 x 最接近的整数是________.

9．函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$的单调递增区间是________.

10．函数 $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x+5}\left(x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\right)$的值域为________.

11．设 $f(x)=lg[1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x\cdot a]$，其中 n 为给定正整数，$n\geqslant 2$,$a\in$R。若 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$时有意义，求 a 的取值范围。

12．当 a 为何值时，方程 $\frac{\lg 2x}{\lg(x+a)}=2$ 有一解，二解，无解？

四、高考水平训练题

1．函数 $f(x)=\sqrt{\frac{8}{|x|}-1}+lg(x^2-1)$的定义域是_________.

2．已知不等式 $x^2-log_mx<0$ 在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时恒成立，则 m 的取值范围是

________.

3．若 $x\in\{x|log_2x=2^{-x}\}$，则 $x^2, x, 1$ 从大到小排列是________.

4．若 $f(x)=ln\frac{1-x}{1+x}$，则使 $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$成立的 a, b 的取值范围是

________.

5．已知 $a_n=log_n(n+1)$，设 $\sum_{n=2}^{1023}\frac{1}{\log a_n 100}=\frac{q}{p}$，其中 p, q 为整数，且$(p ,q)=1$，则 $p\cdot q$ 的值为________.

6．已知 $x>10, y>10, xy=1000$，则$(lgx)\cdot(lgy)$的取值范围是________.

7．若方程 $lg(kx)=2lg(x+1)$只有一个实数解，则实数 k 的取值范围是

________.

8．函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1|| & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ 的定义域为 R，若关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同的实数解，则 b, c 应满足的充要条件是

________.

（1）$b<0$ 且 $c>0$；（2）$b>0$ 且 $c<0$；（3）$b<0$ 且 $c=0$；（4）$b\geqslant 0$ 且 $c=0$。

9．已知 $f(x)=\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)x, F(x)=f(x+t)-f(x-t)(t\neq 0)$，则 $F(x)$是________函数（填奇偶性）.

10．已知 $f(x)=lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，若 $f\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=1$，$f\left(\frac{a-b}{1-ab}\right)=2$，其中$|a|<1, |b|<1$，则 $f(a)+f(b)=$________.

11．设 $a\in\mathbf{R}$，试讨论关于 x 的方程 $lg(x-1)+lg(3-x)=lg(a-x)$的实数解的

个数。

12．设 $f(x)=|lgx|$，实数 a, b 满足 $0<a<b, f(a)=f(b)=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，求证：

（1）$a^4+2a^2-4a+1=0, b^4-4b^3+2b^2+1=0$；（2）$3<b<4$.

13．设 $a>0$ 且 $a\neq 1, f(x)=log_a(x+\sqrt{x^2-1})(x\geqslant 1)$，（1）求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$；（2）若 $f^{-1}(n)<\frac{3^n+3^{-n}}{2}(n\in \boldsymbol{N}_+)$，求 a 的取值范围。

五、联赛一试水平训练题

1．如果 $log_2[log_{\frac{1}{2}}(log_2x)]= log_3[log_{\frac{1}{3}}(log_3x)]= log_5[log_{\frac{1}{5}}(log_5z)]=0$，那么将 x, y, z 从小到大排列为___________.

2．设对任意实数 $x_0> x_1> x_2> x_3>0$，都有 $log_{\frac{x_0}{x_1}}1993+ log_{\frac{x_{10}}{x_2}}1993+ log_{\frac{x_2}{x_3}}1993> klog_{\frac{x_0}{x_3}}1993$ 恒成立，则 k 的最大值为___________.

3．实数 x, y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $S=x^2+y^2$，则 $\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}$ 的值为___________.

4．已知 $0<b<1, 0^0<\alpha<45^0$，则以下三个数：$x=(\sin\alpha)^{log_b sina}, y=(cos\alpha)^{log_b sina}, z=(\sin\alpha)^{log_b sina}$ 从小到大排列为___________.

5．用[x]表示不超过 x 的最大整数，则方程 $lg^2x-[lgx]-2=0$ 的实根个数是___________.

6．设 $a=lgz+lg[x(yz)^{-1}+1], b=lgx^{-1}+lg[xyz+1], c=lgy+lg[(xyz)^{-1}+1]$，记 $a, b,$

c 中的最大数为 M，则 M 的最小值为___________.

7. 若 $f(x)(x\in\mathbf{R})$是周期为 2 的偶函数，当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^{\frac{1}{1998}}$，则 $f\left(\frac{98}{19}\right)$，$f\left(\frac{101}{17}\right)$，$f\left(\frac{104}{15}\right)$由小到大排列为___________.

8．不等式 $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^2+2>0$ 的解集为___________.

9．已知 $a>1, b>1$，且 $lg(a+b)=lga+lgb$，求 $lg(a-1)+lg(b-1)$.

10．（1）试画出由方程 $\frac{\lg(6-x)+\lg(x-2)+\log_{\frac{1}{10}}(x-2)}{\lg 2y}=\frac{1}{2}$ 所确定的函数 $y=f(x)$图象。

（2）若函数 $y=ax+\frac{1}{2}$ 与 $y=f(x)$的图象恰有一个公共点，求 a 的取值范围。

11．对于任意 $n\in\boldsymbol{N}_+(n>1)$，试证明：$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=[log_2 n]+[log_3 n]+\cdots+[log_n n]$。

六、联赛二试水平训练题

1．设 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$且 $x+y+z=1$，求 $u=\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\frac{3y^2-y}{1+y^2}+\frac{3z^2-z}{1+z^2}$ 的最小值。

2．当 a 为何值时，不等式 $log_{\frac{1}{n}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot log_5(x^2+ax+6)+log_a 3\geqslant 0$ 有且只有一个解（$a>1$ 且 $a\neq 1$）。

3．$f(x)$是定义在（1，+∞）上且在（1，+∞）中取值的函数，满足条件；对于任何 $x, y>1$ 及 $u, v>0$, $f(x^u y^v)\leqslant[f(x)]^{\frac{1}{4u}}[f(y)]^{\frac{1}{4v}}$ ①都成立，试确定所有这样的函数 $f(x)$.

4. 求所有函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得 $xf(x)-yf(x)=(x-y)f(x+y)$①成立。

5．设 m≥14 是一个整数，函数 f：$\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ 定义如下：

$$f(n)=\begin{cases} n-m+14 & n>m^2 \\ f(f(n+m-13)) & n\le m^2 \end{cases},$$

求出所有的 m,使得 $f(1995)=1995$.

6．求定义在有理数集上且满足下列条件的所有函数 f:

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)\cdot f(y),\ x,\ y\in\boldsymbol{Q}$.

7．是否存在函数 $f(n)$，将自然数集 N 映为自身，且对每个 $n>1$，$f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$都成立。

8．设 p, q 是任意自然数，求证：存在这样的 $f(x)\in Z(x)$（表示整系数多项式集合），使对 x 轴上的某个长为 $\frac{1}{q}$ 的开区间中的每一个数 x, 有

$$\left|f(x)-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

9．设α，β为实数，求所有 f: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，使得对任意的 $x,y\in\mathbf{R}^+$, $f(x)f(y)=y^2\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)+x^\beta f\left(\frac{f}{2}\right)$成立。