第三章　函数

一、基础知识

定义 1　映射，对于任意两个集合 A，B，依对应法则 f，若对 A 中的任意一个元素 x，在 B 中都有唯一一个元素与之对应，则称 $f: A\to B$ 为一个映射。

定义 2　单射，若 $f: A\to B$ 是一个映射且对任意 $x, y\in A, x\neq y$, 都有 $f(x)\neq f(y)$则称之为单射。

定义 3　满射，若 $f: A\to B$ 是映射且对任意 $y\in B$，都有一个 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$，则称 $f: A\to B$ 是 A 到 B 上的满射。

定义 4　一一映射，若 $f: A\to B$ 既是单射又是满射，则叫做一一映射，只有一一映射存在逆映射，即从 B 到 A 由相反的对应法则 f^{-1} 构成的映射，记作 $f^{-1}: A\to B$。

定义 5　函数，映射 $f: A\to B$ 中，若 A，B 都是非空数集，则这个映射为函数。A 称为它的定义域，若 $x\in A, y\in B$，且 $f(x)=y$（即 x 对应 B 中的 y），则 y 叫做 x 的象，x 叫 y 的原象。集合$\{f(x)|x\in A\}$叫函数的值域。通常函数由解析式给出，此时函数定义域就是使解析式有意义的未知数的取值范围，如函数 $y=3\sqrt{x}-1$ 的定义域为$\{x|x\geqslant 0, x\in \mathrm{R}\}$.

定义 6　反函数，若函数 $f: A\to B$（通常记作 $y=f(x)$）是一一映射，则它的逆映射 $f^{-1}: A\to B$ 叫原函数的反函数，通常写作 $y=f^{-1}(x)$. 这里求反函数的过程是：在解析式 $y=f(x)$中反解 x 得 $x=f^{-1}(y)$，然后将 x, y 互

换得 $y=f^{1}(x)$，最后指出反函数的定义域即原函数的值域。例如：函数 $y=\frac{1}{1-x}$ 的反函数是 $y=1-\frac{1}{x}(x\neq 0)$.

定理 1　互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称。

定理 2　在定义域上为增（减）函数的函数，其反函数必为增（减）函数。

定义 7　函数的性质。

（1)单调性：设函数 $f(x)$在区间 I 上满足对任意的 $x_1, x_2\in I$ 并且 $x_1< x_2$，总有 $f(x_1)<f(x_2)(f(x)>f(x_2))$，则称 $f(x)$在区间 I 上是增（减）函数，区间 I 称为单调增（减）区间。

（2）奇偶性：设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，且 D 是关于原点对称的数集，若对于任意的 $x\in$D，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是奇函数；若对任意的 $x\in$D，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数。奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称。

（3）周期性：对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得当 x 取定义域内每一个数时，$f(x+T)=f(x)$总成立，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为这个函数的周期，如果周期中存在最小的正数 T_0，则这个正数叫做函数 $f(x)$的最小正周期。

定义 8　如果实数 $a<b$，则数集 $\{x|a<x<b, x\in \mathrm{R}\}$叫做开区间，记作（$a,b$），集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in \mathrm{R}\}$记作闭区间 $[a,b]$，集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$记作半开半闭区间（$a,b]$，集合 $\{x|a\leqslant x<b\}$记作半闭半开区间 $[a, b)$，集合

$\{x|x>a\}$记作开区间（$a, +\infty$），集合$\{x|x\leqslant a\}$记作半开半闭区间（$-\infty,a$].

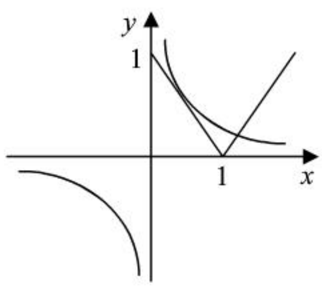
定义 9　函数的图象，点集$\{(x,y)|y=f(x), x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的图象，其中 D 为 $f(x)$的定义域。通过画图不难得出函数 $y=f(x)$的图象与其他函数图象之间的关系($a,b>0$)；（1）向右平移 a 个单位得到 $y=f(x-a)$的图象；（2）向左平移 a 个单位得到 $y=f(x+a)$的图象；（3）向下平移 b 个单位得到 $y=f(x)-b$ 的图象；（4）与函数 $y=f(-x)$的图象关于 y 轴对称；（5）与函数 $y=-f(-x)$的图象关于原点成中心对称；（6）与函数 $y=f^{1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称；（7）与函数 $y=-f(x)$的图象关于 x 轴对称。

定理 3　复合函数 $y=f[g(x)]$的单调性，记住四个字："同增异减"。例如 $y=\frac{1}{2-x}$, u=2-x 在（$-\infty$,2）上是减函数，$y=\frac{1}{u}$在（0，$+\infty$）上是减函数，所以 $y=\frac{1}{2-x}$在（$-\infty$,2）上是增函数。

注：复合函数单调性的判断方法为同增异减。这里不做严格论证，求导之后是显然的。

二、方法与例题

1．数形结合法。

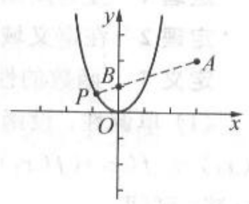


例 1　求方程$|x-1|=\frac{1}{x}$的正根的个数.

【解】 分别画出 $y=|x-1|$和 $y=\frac{1}{x}$的图象，由图象可知两者有唯一交点，所以方程有一个正根。

例 2　求函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值。

【解】　$f(x)=\sqrt{(x^2-2)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-1)^2+(x-0)^2}$，记点 $P(x, x^{-2})$，A（3，2），B（0，1），则 $f(x)$ 表示动点 P 到点 A 和 B 距离的差。



因为 $|PA|-|PA|\leqslant|AB|=\sqrt{3^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$,当且仅当 P 为 AB 延长线与抛物线 $y=x^2$ 的交点时等号成立。

所以 $f(x)_{max}=\sqrt{10}$.

2.函数性质的应用。

例 3　设 $x, y\in \mathrm{R}$，且满足 $\begin{cases}(x-1)^2+1997(x-1)=-1\\(y-1)^3+1997(y-1)=1\end{cases}$，求 $x+y$.

【解】　设 $f(t)=t^3+1997t$，先证 $f(t)$ 在（$-\infty$，$+\infty$）上递增。事实上，若 $a<b$, 则 $f(b)-f(a)=b^3-a^3+1997(b-a)=(b-a)(b^2+ba+a^2+1997)>0$, 所以 $f(t)$ 递增。

由题设 $f(x-1)=-1=f(1-y)$，所以 $x-1=1-y$，所以 $x+y=2$.

例 4　奇函数 $f(x)$ 在定义域（-1，1）内是减函数，又 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求 a 的取值范围。

【解】 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(1-a^2)=-f(a^2-1)$，由题设 $f(1-a)<f(a^2-1)$。

又 $f(x)$ 在定义域（-1，1）上递减，所以 $-1<1-a<a^2-1<1$，解得 $0<a<1$。

例 5　设 $f(x)$是定义在（-∞，+∞）上以 2 为周期的函数，对 $k\in Z$, 用 I_k表示区间$(2k-1, 2k+1]$，已知当 $x\in I_0$时，$f(x)=x^2$，求 $f(x)$在 I_k上的解析式。

【解】　设 $x\in I_k$，则 $2k-1<x\leqslant 2k+1$，

所以 $f(x-2k)=(x-2k)^2$.

又因为 $f(x)$是以 2 为周期的函数，

所以当 $x\in I_k$时，$f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$.

例 6　解方程：$(3x-1)(\sqrt{9x^2-6x+5}+1)+(2x-3)(\sqrt{4x^2-12x+13}+1)=0$.

【解】　令 $\mathrm{m}=3x-1$, $n=2x-3$，方程化为

$\mathrm{m}(\sqrt{m^2+4}+1)+n(\sqrt{n^2+4}+1)=0$.　　①

若 m=0，则由①得 $n=0$，但 m, n 不同时为 0，所以 $\mathrm{m}\neq 0$, $n\neq 0$.

ⅰ)若 m>0，则由①得 $n<0$，设 $f(t)=t(\sqrt{t^2+4}+1)$,则 $f(t)$在（0，+∞）上是增函数。又 $f(\mathrm{m})=f(-n)$，所以 $\mathrm{m}=-n$，所以 $3x-1+2x-3=0$，所以 $x=\frac{4}{5}$.

ⅱ)若 m<0，且 $n>0$。同理有 $\mathrm{m}+n=0, x=\frac{4}{5}$,但与 m<0 矛盾。

综上，方程有唯一实数解 $x=\frac{4}{5}$.

3.配方法。

例 7　求函数 $y=x+\sqrt{2x+1}$的值域。

【解】　$y=x+\sqrt{2x+1}=\frac{1}{2}[2x+1+2\sqrt{2x+1}+1]-1$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}+1)-1\geqslant\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，y 取最小值 $-\frac{1}{2}$，所以函数值域是 $[-\frac{1}{2}，+\infty)$。

4．换元法。

例 8　求函数 $y=(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1),x\in[0,1]$ 的值域。

【解】令 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=u$，因为 $x\in[0,1]$，所以 $2\leqslant u^2=2+2\sqrt{1-x^2}\leqslant 4$，

所以 $\sqrt{2}\leqslant u\leqslant 2$，所以 $\frac{\sqrt{2}+2}{2}\leqslant\frac{u+2}{2}\leqslant 2$，$1\leqslant\frac{u^2}{2}\leqslant 2$，所以

$y=\frac{u+2}{2},u^2\in[\sqrt{2}+2，8]$。

所以该函数值域为 $[2+\sqrt{2}，8]$。

5．判别式法。

例 9　求函数 $y=\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ 的值域。

【解】由函数解析式得 $(y-1)x^2+3(y+1)x+4y-4=0$. ①

当 $y\neq 1$ 时，①式是关于 x 的方程有实根。

所以 $\triangle=9(y+1)^2-16(y-1)^2\geqslant 0$，解得 $\frac{1}{7}\leqslant y\leqslant 1$.

又当 $y=1$ 时，存在 $x=0$ 使解析式成立，

所以函数值域为 $[\frac{1}{7}，7]$。

6．关于反函数。

例 10　若函数 $y=f(x)$ 定义域、值域均为 R，且存在反函数。若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增，求证：$y=f^{-1}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也是增函数。

【证明】设 $x_1<x_2$, 且 $y_1=f^{-1}(x_1), y_2=f^{-1}(x_2)$，则 $x_1=f(y_1), x_2=f(y_2)$，若 $y_1\geqslant y_2$，则因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增，所以 $x_1\geqslant x_2$ 与假设矛盾，所以 $y_1<y_2$。

即 $y=f^{-1}(x)$在$(-\infty,+\infty)$递增。

例 11　设函数 $f(x)=\sqrt[4]{\frac{4x+1}{3x+2}}$，解方程：$f(x)=f^{-1}(x)$.

【解】　首先 $f(x)$定义域为（$-\infty$，$-\frac{2}{3}$）$\cup$$[-\frac{1}{4}$，$+\infty$）；其次，设 x_1, x_2 是定义域内变量，且 $x_1<x_2<-\frac{2}{3}$；$\frac{4x_2+1}{3x_2+2}-\frac{4x_1+1}{3x_1+2}=\frac{5(x_2-x_1)}{(3x_2+2)(3x_1+2)}>0$,

所以 $f(x)$在（$-\infty$，$-\frac{2}{3}$）上递增，同理 $f(x)$在$[-\frac{1}{4}$，$+\infty$）上递增。

在方程 $f(x)=f^{-1}(x)$中，记 $f(x)=f^{-1}(x)=y$，则 $y\geqslant 0$，又由 $f^{-1}(x)=y$ 得 $f(y)=x$，所以 $x\geqslant 0$,所以 $x,y\in[-\frac{1}{4}$，$+\infty$）.

若 $x\neq y$，设 $x<y$，则 $f(x)=y<f(y)=x$，矛盾。

同理若 $x>y$ 也可得出矛盾。所以 $x=y$.

即 $f(x)=x$，化简得 $3x^5+2x^4-4x-1=0$,

即$(x-1)(3x^4+5x^3+5x^2+5x+1)=0$,

因为 $x\geqslant 0$，所以 $3x^4+5x^3+5x^2+5x+1>0$，所以 $x=1$.

三、基础训练题

1．已知 $X=\{-1, 0, 1\}$, $Y=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$，映射 f：$X\to Y$ 满足：对任意的 $x\in X$，它在 Y 中的象 $f(x)$使得 $x+f(x)$为偶数，这样的映射有_______

个。

2．给定 A={1，2，3}，B={-1，0，1}和映射 f：$X \to Y$，若 f 为单射，则 f 有_______个；若 f 为满射，则 f 有_______个；满足 $f[f(x)]=f(x)$ 的映射有_______个。

3．若直线 $y=k(x-2)$与函数 $y=x^2+2x$ 图象相交于点（-1，-1），则图象与直线一共有_______个交点。

4．函数 $y=f(x)$的值域为$[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$，则函数 $g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的值域为_______。

5．已知 $f(x)=\frac{1}{x+1}$，则函数 $g(x)=f[f(x)]$的值域为_______。

6. 已知 $f(x)=|x+a|$，当 $x\geqslant 3$ 时 $f(x)$为增函数，则 a 的取值范围是_______。

7．设 $y=f(x)$在定义域（$\frac{1}{2}$，2）内是增函数，则 $y=f(x^2-1)$的单调递减区间为_______。

8．若函数 $y=\varphi(x)$存在反函数 $y=\varphi^{-1}(x)$，则 $y=\varphi^{-1}(x)$的图象与 $y=-\varphi(-x)$的图象关于直线_______对称。

9．函数 $f(x)$满足 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，则 $f(\frac{1}{x})$=_______。

10. 函数 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}, x\in(1,+\infty)$的反函数是_______。

11．求下列函数的值域：（1）$y=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}$；(2)$y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$；(3)$y=x+2\sqrt{x+1}$；(4) $y=\frac{x-1}{x^2+2}$.

12. 已知 $y=f(x)$ 定义在 R 上，对任意 $x\in R, f(x)=f(x+2)$，且 $f(x)$ 是偶函数，又当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式。

四、高考水平训练题

1．已知 $a\in\left(-\frac{1}{2},0\right], f(x)$ 定义域是（0,1]，则 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)+f(x)$ 的定义域为_______。

2．设 $0\leqslant a<1$ 时，$f(x)=(a-1)x^2-6ax+a+1$ 恒为正值。则 $f(x)$ 定义域为_______。

3．映射 f: $\{a, b, c, d\}\to\{1，2，3\}$ 满足 $10<f(a)\cdot f(b)\cdot f(c)\cdot f(d)<20$，这样的映射 f 有_______个。

4．设函数 $y=f(x)(x\in R)$ 的值域为 R，且为增函数，若方程 $f(x)=x$ 解集为 P，$f[f(x)]=x$ 解集为 Q，则 P，Q 的关系为：P_______Q（填=、$\subsetneq$、$\supsetneq$）。

5. 下列函数是否为奇函数：（1）$f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；（2）$g(x)=|2x+1|-|2x-1|$；(3) $\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$；（4）$y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.

6. 设函数 $y=f(x)(x\in R$ 且 $x\neq 0)$，对任意非零实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，又 $f(x)$ 在（0，+∞）是增函数，则不等式 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})\leqslant 0$ 的解集为_______。

7．函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\in P \\ -x & x\in M \end{cases}$，其中 P，M 为 R 的两个非空子集，又规定 $f(P)=\{y|y=f(x), x\in P\}, f(M)=\{y|y=f(x), x\in M\}$，给出如下判断：①若

$P \cap M=\varnothing$，则 $f(P) \cap f(M)=\varnothing$；②若 $P \cap M \neq \varnothing$，则 $f(P) \cap f(M) \neq \varnothing$；③若 $P \cup M=R$, 则 $f(P) \cup f(M)=R$；④若 $P \cup M \neq R$，则 $f(P) \cup f(M) \neq R$. 其中正确的判断是_______。

8．函数 $y=f(x+1)$的反函数是 $y=f^{1}(x+1)$，并且 $f(1)=3997$，则 $f(1998)=$_______。

9．已知 $y=f(x)$是定义域为[-6，6]的奇函数，且当 $x\in[0，3]$时是一次函数，当 $x\in[3，6]$时是二次函数，又 $f(6)=2$，当 $x\in[3，6]$时，$f(x)\leqslant f(5)=3$。求 $f(x)$的解析式。

10．设 $a>0$，函数 $f(x)$定义域为 R，且 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，求证：$f(x)$为周期函数。

11．设关于 x 的方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两根为α，β（α<β），已知函数 $f(x)=\frac{4x-t}{x^2+1}$,（1）求 $f(\alpha)$、$f(\beta)$；（2）求证：$f(x)$在[α，β]上是增函数；（3）对任意正数 x_1, x_2，求证：$\left|f\left(\frac{x_1\alpha+x_2\beta}{x_1+x_2}\right)-f\left(\frac{x_1\beta+x_2\alpha}{x_1+x_2}\right)\right|<2|\alpha-\beta|$.

五、联赛一试水平训练题

1．奇函数 $f(x)$存在函数 $f^{1}(x)$，若把 $y=f(x)$的图象向上平移 3 个单位，然后向右平移 2 个单位后，再关于直线 $y=-x$ 对称，得到的曲线所对应的函数是________.

2．若 $a>0$，$a\neq 1$,$F(x)$是奇函数，则 $G(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$是________（奇偶性）.

3．若 $F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$，则下列等式中正确的有________.①$F(-2-x)=-2-F(x)$；②$F(-x)=F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$；③$F(x^{-1})=F(x)$；④$F(F(x))=-x$.

4.设函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足 $f(0)=1$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$________.

5．已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(1)=1$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+5)\geqslant f(x)+5$, $f(x+1)\leqslant f(x)+1$。若 $g(x)=f(x)+1-x$，则 $g(2002)=$ ________.

6. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$的单调递增区间是________.

7. 函数 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$的奇偶性是：________奇函数，________偶函数（填是，非）。

8. 函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$的值域为________.

9．设 $f(x)=\begin{cases}1 & x\in[1,2]\\ x-1 & x\in(2,3]\end{cases}$,

对任意的 $a\in\mathbf{R}$, 记 $V(a)=\max\{f(x)-ax|x\in[1,3]\}-\min\{f(x)-ax|x\in[1,3]\}$，试求 $V(a)$的最小值。

10．解方程组：$\begin{cases}1-x^2=y\\ 1-y^2=z.\\ 1-z^2=x\end{cases}$ （在实数范围内）

11．设 $k\in \boldsymbol{N}_+, f: \boldsymbol{N}_+\to\boldsymbol{N}_+$满足：（1）$f(x)$严格递增；（2）对任意 $n\in\boldsymbol{N}_+$，有 $f[f(n)]=kn$，求证：对任意 $n\in\boldsymbol{N}_+$，都有 $\frac{2k}{k+1}n\leqslant f(n)\leqslant\frac{k+1}{2}n.$

六、联赛二试水平训练题

1．求证：恰有一个定义在所有非零实数上的函数 f，满足：（1）对任意 $x\neq 0, f(x)=x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$；（2）对所有的 $x\neq -y$ 且 $xy\neq 0$，有 $f(x)+f(y)=1+f(x+y)$.

2.设 $f(x)$对一切 $x>0$ 有定义，且满足：（ⅰ）$f(x)$在（0，+∞）是增函数；(ⅱ)任意 $x>0, f(x)f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=1$，试求 $f(1)$.

3. $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 满足：（1）任意 $x\in[0, 1], f(x)\geqslant 0$；（2）$f(1)=1$；（3）当 $x, y, x+y\in[0, 1]$时，$f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$，试求最小常数 c，对满足（1），（2），（3）的函数 $f(x)$都有 $f(x)\leqslant cx$.

4. 试求 $f(x,y)=6(x^2+y^2)(x+y)-4(x^2+xy+y^2)-3(x+y)+5(x>0, y>0)$的最小值。

5．对给定的正数 $p,q\in(0, 1)$，有 $p+q>1\geqslant p^2+q^2$，试求 $f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 在$[1-q,p]$上的最大值。

6．已知 $f: (0,1)\to\mathbf{R}$ 且 $f(x)=\begin{cases} x & x\notin Q \\ \frac{p+1}{q} & x-\frac{p}{q},(p,q)=1,0<p<q \end{cases}$.

当 $x\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$时，试求 $f(x)$的最大值。

7．函数 $f(x)$定义在整数集上，且满足 $f(n)=\begin{cases} n-3 & (n\geq 1000) \\ f[f(n+5)] & (n<1000) \end{cases}$，求 $f(100)$的值。

8．函数 $y=f(x)$定义在整个实轴上，它的图象在围绕坐标原点旋转角$\frac{\pi}{2}$后不变。（1）求证：方程 $f(x)=x$ 恰有一个解；（2）试给出一个具有上述性质的函数。

9．设 $\boldsymbol{Q}^{+}$是正有理数的集合，试构造一个函数 $f\colon Q^{+}\to Q^{+}$，满足这样的条件：$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}, \forall x, y\in \boldsymbol{Q}^{+}$.