第一章 集合与简易逻辑

一、基础知识

定义 1　一般地，一组确定的、互异的、无序的对象的全体构成集合，简称集，用大写字母来表示；集合中的各个对象称为元素，用小写字母来表示，元素 x 在集合 A 中，称 x 属于 A，记为 $x\in A$，否则称 x 不属于 A，记作 $x\notin A$。例如，通常用 N，Z，Q，B，Q^{+}分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、正有理数集，不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 来表示。集合分有限集和无限集两种。

集合的表示方法有列举法：将集合中的元素一一列举出来写在大括号内并用逗号隔开表示集合的方法，如{1，2，3}；描述法：将集合中的元素的属性写在大括号内表示集合的方法。例如{有理数}，$\{x|x>0\}$ 分别表示有理数集和正实数集。

定义 2　子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则 A 叫做 B 的子集，记为 $A\subseteq B$，例如 $N\subseteq Z$。规定空集是任何集合的子集，如果 A 是 B 的子集，B 也是 A 的子集，则称 A 与 B 相等。如果 A 是 B 的子集，而且 B 中存在元素不属于 A，则 A 叫 B 的真子集。

定义 3　交集，$A\bigcap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\}$.

定义 4　并集，$A\bigcup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\}$.

定义 5　补集，若 $A\subseteq I,\text{则}C_1 A=\{x|x\in I,\text{且}x\notin A\}$ 称为 A 在 I 中的补集。

定义 6　差集，$A\setminus B=\{x|x\in A,\text{且}x\notin B\}$。

定义 7　集合 $\{x|a<x<b,x\in R,a<b\}$ 记作开区间 (a,b)，集合

$\{x|a\le x\le b,x\in R,a<b\}$ 记作闭区间 $[a,b]$，R 记作 $(-\infty,+\infty)$.

定理 1　集合的性质：对任意集合 A，B，C，有：

（1）$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;　（2）$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$；

（3）$C_1 A\bigcup C_1 B=C_1(A\bigcap B)$;　（4）$C_1 A\bigcap C_1 B=C_1(A\bigcup B)$.

【证明】这里仅证（1）、(3)，其余由读者自己完成。

（1）若 $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$，则 $x\in A$，且 $x\in B$ 或 $x\in C$，所以 $x\in(A\bigcap B)$ 或 $x\in(A\bigcap C)$，即 $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$；反之，$x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$，则 $x\in(A\bigcap B)$ 或 $x\in(A\bigcap C)$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in C$，即 $x\in A$ 且 $x\in(B\bigcup C)$，即 $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$.

（3）若 $x\in C_1 A\bigcup C_1 B$，则 $x\in C_1 A$ 或 $x\in C_1 B$，所以 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，所以 $x\notin(A\bigcap B)$，又 $x\in I$，所以 $x\in C_1(A\bigcap B)$，即 $C_1 A\bigcup C_1 B\subseteq C_1(A\bigcap B)$，反之也有 $C_1(A\bigcap B)\subseteq C_1 A\bigcup C_1 B$.

定理 2　加法原理：做一件事有 n 类办法，第一类办法中有 m_1 种不同的方法，第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事一共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

定理 3　乘法原理：做一件事分 n 个步骤，第一步有 m_1 种不同的方法，第二步有 m_2 种不同的方法，…，第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事一共有 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种不同的方法。

二、方法与例题

1．利用集合中元素的属性，检验元素是否属于集合。

例 1　设$M=\{a|a=x^2-y^2,x,y\in Z\}$，求证：

（1）$2k-1\in M,(k\in Z)$；

（2）$4k-2\in M,(k\in Z)$；

（3）若 $p\in M,q\in M$，则 $pq\in M$.

[证明]（1）因为$k,k-1\in Z$，且$2k-1=k^2-(k-1)^2$，所以$2k-1\in M$.

（2）假设$4k-2\in M(k\in Z)$，则存在$x,y\in Z$，使$4k-2=x^2-y^2$，由于$x-y$和$x+y$有相同的奇偶性，所以$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$是奇数或 4 的倍数，不可能等于$4k-2$，假设不成立，所以$4k-2\notin M$.

（3）设 $p=x^2-y^2,q=a^2-b^2,x,y,a,b\in Z$，则 $pq=(x^2-y^2)(a^2-b^2)$

$=a^2a^2+y^2b^2-x^2b^2-y^2a^2=(xa-yb)^2-(xb-ya)^2\in M$

（因为$xa-ya\in Z,xb-ya\in Z$）。

2．利用子集的定义证明集合相等，先证$A\subseteq B$，再证$B\subseteq A$，则 *A*=*B*。

例 2　设 *A*，*B* 是两个集合，又设集合 M 满足

$A\cap M=B\cap M=A\cap B,A\cup B\cup M=A\cup B$，求集合 M（用 *A*，*B* 表示）。

【解】先证$(A\cap B)\subseteq M$，若$x\in(A\cap B)$，因为$A\cap M=A\cap B$，所以

$x \in A \cap M, x \in M$，所以$(A \cap B) \subseteq M$；

再证$M \subseteq (A \cap B)$，若$x \in M$，则$x \in A \cup B \cup M = A \cup B.$1）若$x \in A$，则$x \in A \cap M = A \cap B$；2）若$x \in B$，则$x \in B \cap M = A \cap B$。所以$M \subseteq (A \cap B).$

综上，$M = A \cap B.$

3．分类讨论思想的应用。

例 3　$A = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x|x^2 - ax + a - 1 = 0\}, C = \{x|x^2 - mx + 2 = 0\}$，若$A \cup B = A, A \cap C = C$，求$a, m.$

【解】依题设，$A = \{1,2\}$，再由$x^2 - ax + a - 1 = 0$解得$x = a - 1$或$x = 1$，

因为$A \cup B = A$，所以$B \subseteq A$，所以$a - 1 \in A$，所以$a - 1 = 1$或 2，所以$a = 2$或 3。

因为$A \cap C = C$，所以$C \subseteq A$，若$C = \varnothing$，则$\Delta = m^2 - 8 < 0$，即$-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$，若$C \neq \varnothing$，则$1 \in C$或$2 \in C$，解得$m = 3.$

综上所述，$a = 2$或$a = 3$；$m = 3$或$-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$。

4．计数原理的应用。

例 4　集合 A，B，C 是 I={1，2，3，4，5，6，7，8，9，0}的子集，（1）若$A \cup B = I$，求有序集合对（A，B）的个数；（2）求 I 的非空真子集的个数。

【解】（1）集合 I 可划分为三个不相交的子集；$A \backslash B$，$B \backslash A$，$A \cap B, I$中的每个元素恰属于其中一个子集，10 个元素共有 3^{10} 种可能，每一种可能确定一个满足条件的集合对，所以集合对有 3^{10} 个。

（2）I 的子集分三类：空集，非空真子集，集合 I 本身，确定一个子集分十步，第一步，1 或者属于该子集或者不属于，有两种；第二步，2 也有两种，…，第 10 步，0 也有两种，由乘法原理，子集共有 $2^{10}=1024$ 个，非空真子集有 1022 个。

5．配对方法。

例 5 给定集合 $I=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的 k 个子集：$A_1,A_2,\cdots,A_k$，满足任何两个子集的交集非空，并且再添加 I 的任何一个其他子集后将不再具有该性质，求 k 的值。

【解】将 I 的子集作如下配对：每个子集和它的补集为一对，共得 2^{n-1} 对，每一对不能同在这 k 个子集中，因此，$k\le 2^{n-1}$；其次，每一对中必有一个在这 k 个子集中出现，否则，若有一对子集未出现，设为 C_1A 与 A，并设 $A\bigcap A_1=\varnothing$，则 $A_1\subseteq C_1A$，从而可以在 k 个子集中再添加 C_1A，与已知矛盾，所以 $k\ge 2^{n-1}$。综上，$k=2^{n-1}$。

6．竞赛常用方法与例问题。

定理 4　容斥原理；用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数，则 $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|$,

$|A\bigcup B\bigcup C|=|A|+|B|+|C|-|A\bigcap B|-|A\bigcap C|-|B\bigcap C|+|A\bigcap B\bigcap C|$，*需要 xy* 此结论可以推广到 n 个集合的情况，即 $\sum$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i\ne j}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|.$$

定义 8　集合的划分：若 $A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n=I$，且 $A_i\bigcap A_j=\varnothing(1\le i,j\le n,i\ne j)$，则这些子集的全集叫 I 的一个 n-划分。

定理 5　最小数原理：自然数集的任何非空子集必有最小数。

定理 6　抽屉原理：将 $mn+1$ 个元素放入 $n(n>1)$ 个抽屉，必有一个抽屉放有不少于 $m+1$ 个元素，也必有一个抽屉放有不多于 m 个元素；将无穷多个元素放入 n 个抽屉必有一个抽屉放有无穷多个元素。

例 6　求 1，2，3，…，100 中不能被 2，3，5 整除的数的个数。

【解】　记 $I=\{1,2,3,\cdots,100\}, A=\{x|1\le x\le 100, \text{且}x\text{能被}2\text{整除（记为}2|x)\}$，$B=\{x|1\le x\le 100, 3|x\}, C=\{x|1\le x\le 100, 5|x\}$，由容斥原理，

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{5}\right]-\left[\frac{100}{6}\right]-\left[\frac{100}{10}\right]-\left[\frac{100}{15}\right]+\left[\frac{100}{30}\right]=74$$

，所以不能被 2，3，5 整除的数有 $|I|-|A\cup B\cup C|=26$ 个。

例 7　S 是集合{1，2，…，2004}的子集，S 中的任意两个数的差不等于 4 或 7，问 S 中最多含有多少个元素？

【解】将任意连续的 11 个整数排成一圈如右图所示。由题目条件可知每相邻两个数至多有一个属于 S，将这 11 个数按连续两个为一组，分成 6 组，其中一组只有一个数，若 S 含有这 11 个数中至少 6 个，则必有两个数在同一组，与已知矛盾，所以 S 至多含有其中 5 个数。又因为 2004=182×11+2，所以 S 一共至多含有 182×5+2=912 个元素，另一方面，当 $S=\{r|r=11k+t, t=1,2,4,7,10, r\le 2004, k\in N\}$ 时，恰有 $|S|=912$，且 S 满足题目条件，所以最少含有 912 个元素。

例8　求所有自然数 $n(n\ge 2)$，使得存在实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足：

$\{|a_i - a_j| | 1 \le i < j \le n\} = \{1,2,\cdots,\frac{n(n-1)}{2}\}.$

【解】 当$n=2$时，$a_1=0,a_2=1$；当$n=3$时，$a_1=0,a_2=1,a_3=3$；当$n=4$时，$a_1=0,a_2=2,a_3=5,a_4=1$。下证当$n\ge 5$时，不存在$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足条件。

令$0=a_1<a_2<\cdots<a_n$，则$a_n=\frac{n(n-1)}{2}.$

所以必存在某两个下标$i<j$,使得$|a_i-a_j|=a_n-1$,所以$a_n-1=a_{n-1}-a_1=a_{n-1}$或$a_n-1=a_n-a_2$,即$a_2=1$,所以$a_n=\frac{n(n-1)}{2},a_{n-1}=a_n-1$或$a_n=\frac{n(n-1)}{2}$，$a_2=1$。

（ⅰ)若$a_n=\frac{n(n-1)}{2},a_{n-1}=a_n-1$,考虑$a_n-2$,有$a_n-2=a_{n-2}$或$a_n-2=a_n-a_2$，即$a_2=2$，设$a_{n-2}=a_n-2$，则$a_{n-1}-a_{n-2}=a_n-a_{n-1}$，导致矛盾，故只有$a_2=2.$

考虑a_n-3，有$a_n-3=a_{n-2}$或$a_n-3=a_n-a_3$，即$a_3=3$，设$a_n-3=a_{n-2}$，则$a_{n-1}-a_{n-2}=2=a_2-a_0$，推出矛盾，设$a_3=3$，则$a_n-a_{n-1}=1=a_3-a_2$，又推出矛盾， 所以$a_{n-2}=a_2,n=4$故当$n\ge 5$时，不存在满足条件的实数。

（ⅱ）若$a_n=\frac{n(n-1)}{2},a_2=1$，考虑$a_n-2$，有$a_n-2=a_{n-1}$或$a_n-2=a_n-a_3$，即$a_3=2$，这时$a_3-a_2=a_2-a_1$，推出矛盾，故$a_{n-1}=a_n-2$。考虑$a_n-3$，有$a_n-3=a_{n-2}$或$a_n-3=a_n-a_3$，即$a_3$=3，于是$a_3-a_2=a_n-a_{n-1}$，矛盾。因此$a_{n-2}=a_n-3$，所以$a_{n-1}-a_{n-2}=1=a_2-a_1$，这又矛盾，所以只有$a_{n-2}=a_2$，所以$n=4$。故当$n\ge 5$时，不存在满足条件的实数。

例 9 设A={1，2，3，4，5，6}，B={7，8，9，……，n}，在A中取三个数，B中取两个数组成五个元素的集合A_i，$i=1,2,\cdots,20,|A_i\cap A_j|\le 2,1\le i<j\le 20.$求$n$的最小值。

【解】 $n_{\min}=16.$

设 B 中每个数在所有 A_i 中最多重复出现 k 次，则必有 $k\le 4$。若不然，数 m 出现 k 次（$k>4$），则 $3k>12$.在 m 出现的所有 A_i 中，至少有一个 A 中的数出现 3 次，不妨设它是 1，就有集合$\{1$，$a_1,a_2,m,b_1\}$ $\{1,a_3,a_4,m,b_2\},\{1,a_5,a_6,m,b_3\}$，其中 $a_i\in A,1\le i\le 6$，为满足题意的集合。a_i 必各不相同，但只能是 2，3，4，5，6 这 5 个数，这不可能，所以 $k\le 4$.

20 个 A_i 中，B 中的数有 40 个，因此至少是 10 个不同的，所以 $n\ge 16$。当 $n=16$ 时，如下 20 个集合满足要求：

{1，2，3，7，8}， {1，2，4，12，14}， {1，2，5，15，16}， {1，2，6，9，10}，

{1，3，4，10，11}， {1，3，5，13，14}， {1，3，6，12，15}， {1，4，5，7，9}，

{1，4，6，13，16}， {1，5，6，8，11}， {2，3，4，13，15}， {2，3，5，9，11}，

{2，3，6，14，16}， {2，4，5，8，10}， {2，4，6，7，11}， {2，5，6，12，13}，

{3，4，5，12，16}， {3，4，6，8，9}， {3，5，6，7，10}， {4，5，6，14，15}。

例 10 集合{1，2，…，$3n$}可以划分成 n 个互不相交的三元集合 $\{x,y,z\}$，其中 $x+y=3z$，求满足条件的最小正整数 n.

【解】 设其中第i个三元集为$\{x_i, y, z_i\}, i=1,2,\cdots,n,$则 $1+2+\ldots+3n=\sum_{i=1}^{n}4z_i$，

所以$\frac{3n(3n+1)}{2}=4\sum_{i=1}^{n}z_i$。当$n$为偶数时，有$8|3n$，所以$n\geq 8$，当$n$为奇数时，有$8|3n+1$，所以$n\geq 5$，当$n=5$时，集合{1，11，4}，{2，13，5}，{3，15，6}，{9，12，7}，{10，14，8}满足条件，所以n的最小值为5。

三、基础训练题

1．给定三元集合$\{1,x,x^2-x\}$，则实数x的取值范围是___________。

2．若集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in R,x\in R\}$中只有一个元素，则$a$=___________。

3．集合$B=\{1,2,3\}$的非空真子集有___________个。

4．已知集合$M=\{x|x^2-3x+2=0\},N=\{x|ax+1=0\}$，若$N\subseteq M$，则由满足条件的实数$a$组成的集合$P$=___________。

5．已知$A=\{x|x<2\},B=\{x|x\leq a\}$，且$A\subseteq B$，则常数$a$的取值范围是___________。

6．若非空集合S满足$S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且若$a\in S$，则$6-a\in S$，那么符合要求的集合S有___________个。

7．集合$X=\{2n+1|n\in Z\}$与$Y=\{4k\pm 1|k\in Z\}$之间的关系是___________。

8．若集合$A=\{x,xy,xy-1\}$，其中$x\in Z$，$y\in Z$且$y\neq 0$，若$0\in A$，则A中元素之和是___________。

9．集合 $P=\{x|x^2+x-6=0\},M=\{x|mx-1=0\}$，且 $M\subseteq P$，则满足条件的 m 值构成的集合为___________。

10．集合 $A=\{x|y=2x+1,x\in R^+\},B=\{y|y=-x^2+9,x\in R\}$，则

$A\bigcap B=$___________。

11．已知 S 是由实数构成的集合，且满足 1）$1\notin S$;2）若 $a\in S$，则 $\dfrac{1}{1-a}\in S$。如果 $S\neq\varnothing$，S 中至少含有多少个元素？说明理由。

12．已知 $A=\{(x,y)|y=a|x|\},B=\{(x,y)|y=x+a\},C=A\bigcap B$，又 C 为单元素集合，求实数 a 的取值范围。

四、高考水平训练题

1．已知集合 $A=\{x,xy,x+y\},B=\{0,|x|,y\}$，且 A=B，则 $x=$___________，

$y=$___________。

2．$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},A\subseteq I,B\subseteq I,A\bigcap B=\{2\},(C_1 A)\bigcap(C_1 B)=\{1,9\}$，

$(C_1 A)\bigcap B=\{4,6,8\}$，则 $A\bigcap(C_1 B)=$___________。

3．已知集合 $A=\{x|10+3x-x^2\geq 0\},B=\{x|m+1\leq x\leq 2m-1\}$，当 $A\bigcap B=\varnothing$ 时，实数 m 的取值范围是___________。

4．若实数 a 为常数，且 $a\in A=\left\{x\left|\dfrac{1}{\sqrt{ax^2-x+1}}=1\right.\right\}$，则 $a=$___________。

5．集合$M=\{m^2,m+1,-3\},N=\{m-3,2m-1,m^2+1\}$，若$M\bigcap N=\{-3\}$，则$m=$___________。

6．集合$A=\{a|a=5x+3,x\in N_+\},B=\{b|b=7y+2,y\in N_+\}$，则$A\bigcap B$中的最小元素是___________。

7．集合$A=\{x-y,x+y,xy\},B=\{x^2+y^2,x^2-y^2,0\}$，且$A$=$B$，则$x+y=$___________。

8．已知集合$A=\{x|\frac{x+1}{2-x}<0\},B=\{x|px+4<0\}$，且$B\subseteq A$，则$p$的取值范围是___________。

9．设集合$A=\{(x,y)|y^2-x-1=0\},B=\{(x,y)|4x^2+2x-2y+5=0\},C=\{(x,y)|y=kx+b\}$，问：是否存在$k,b\in N$，使得$(A\bigcup B)\bigcap C=\varnothing$，并证明你的结论。

10．集合A和B各含有12个元素，$A\bigcap B$含有4个元素，试求同时满足下列条件的集合C的个数：1）$C\subseteq A\bigcup B$且C中含有3个元素；2）$C\bigcap A\neq\varnothing$。

11．判断以下命题是否正确：设A,B是平面上两个点集，$C_r=\{(x,y)|x^2+y^2\le r^2\}$，若对任何$r\ge 0$，都有$C_r\bigcup A\subseteq C_r\bigcup B$，则必有$A\subseteq B$，证明你的结论。

五、联赛一试水平训练题

1．已知集合$A=\{x|x<0\},B=\{z|z=\frac{m^2x-1}{mx+1},x>2\},B\neq\varnothing,且B\subseteq A$，则实数$m$的取值范围是___________。

2．集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2n,2n+1\}$ 的子集 B 满足：对任意的 $x,y\in B,x+y\notin B$，则集合 B 中元素个数的最大值是___________。

3．已知集合 $P=\{a,aq,aq^2\},Q=\{a,a+d,a+2d\}$，其中 $a\neq 0$，且 $a\in R$，若 P=Q，则实数 $q=$___________。

4．已知集合 $A=\{(x,y)\|x|+|y|=a,a>0\},B=\{(x,y)\|xy|+1=|x|+|y|\}$，若 $A\bigcap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，则 $a=$___________。

5．集合 $M=\{u|u=12m+8n+4l,m,l,n\in Z\}$，集合

$N=\{u|u=20p+16q+12r,p,q,r\in Z\}$，则集合 M 与 N 的关系是___________。

6．设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$，集合 A 满足：$A\subseteq M$，且当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 A 中元素最多有___________个。

7．非空集合 $A=\{x|2a+1\leq x\leq 3a-5\},B=\{x|3\leq x\leq 22\}$，≤则使 $A\subseteq A\bigcap B$ 成立的所有 a 的集合是___________。

8．已知集合 A，B，aC（不必相异）的并集 $A\bigcup B\bigcup C=\{1,2,\cdots,n\}$，则满足条件的有序三元组（$A$，$B$，$C$）个数是___________。

9．已知集合 $A=\{(x,y)|ax+y=1\},B=\{(x,y)|x+ay=1\},C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，问：当 a 取何值时，$(A\bigcup B)\bigcap C$ 为恰有 2 个元素的集合？说明理由，若改为 3 个元素集合，结论如何？

10．求集合 B 和 C，使得 $B\bigcup C=\{1,2,\cdots,10\}$，并且 C 的元素乘积等于 B 的元素和。

11．S 是 Q 的子集且满足：若 $r\in Q$，则 $r\in S,-r\in S,r=0$ 恰有一个成立，并且若 $a\in S,b\in S$，则 $ab\in S,a+b\in S$，试确定集合 S。

12．集合 S={1，2，3，4，5，6，7，8，9，0}的若干个五元子集满足：S 中的任何两个元素至多出现在两个不同的五元子集中，问：至多有多少个五元子集？

六、联赛二试水平训练题

1．S_1,S_2,S_3 是三个非空整数集，已知对于 1，2，3 的任意一个排列 i,j,k，如果 $x\in S_i$， $y\in S_j$，则 $x-y\in S_i$ 。求证：S_1,S_2,S_3 中必有两个相等。

2．求证：集合{1，2，…，1989}可以划分为 117 个互不相交的子集 $A_i\ (i=1,2,\cdots,117)$，使得（1）每个 A_i 恰有 17 个元素；（2）每个 A_i 中各元素之和相同。

3．某人写了 n 封信，同时写了 n 个信封，然后将信任意装入信封，问：每封信都装错的情况有多少种？

4．设 $a_1,a_2,\cdots,a_{20}$ 是 20 个两两不同的整数，且整合 $\{a_i+a_j|1\le i\le j\le 20\}$ 中有 201 个不同的元素，求集合 $\{|a_i-a_j||1\le i<j\le 20\}$ 中不同元素个数的最小可能值。

5．设 S 是由 $2n$ 个人组成的集合。求证：其中必定有两个人，他们的公共朋友的个数为偶数。

6．对于整数 $n\ge 4$，求出最小的整数 $f(n)$，使得对于任何正整数 m，集合 $\{m,m+1,\cdots,m+n-1\}$ 的任一个 $f(n)$ 元子集中，均有至少 3 个两两互质的元素。

7．设集合 S={1，2，…，50}，求最小自然数 k，使 S 的任意一个 s 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b，满足 $(a+b)|ab$ 。

8．集合 $X=\{1,2,\cdots,6k\},k\in N_+$，试作出 X 的三元子集族&，满足：

（1）X 的任意一个二元子集至少被族&中的一个三元子集包含；

（2）$|\&|=6k^2$ ($|\&|$表示&的元素个数)。

9．设集合 $A=\{1,2,\cdots,m\}$，求最小的正整数 m，使得对 A 的任意一个 14-分划 $A_1,A_2,\cdots,A_{14}$，一定存在某个集合 A_i $(1\le i\le 14)$，在 A_i 中有两个元素 a 和 b 满足 $b<a\le\frac{4}{3}b$。