2017 年浙江省高中数学竞赛试题

说明：本试卷共 15 题，10 道填空题，5 道解答题。填空题的答案和解答题的解答过程书写在答题纸上。

一、填空题（每题 8 分，共 80 分）

1. 在多项式 $(x-1)^3(x+2)^{10}$ 的展开式中 x^6 的系数为____________.

2. 已知 $\log_{\sqrt{7}}(5a-3)=\log_{\sqrt{a^2+1}}5$，则实数 $a=$____________.

3. 设 $f(x)=x^2+ax+b$ 在 $[0,1]$ 中有两个实数根，则 a^2-2b 的取值范围为____________.

4. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $\dfrac{\sin^2x-\cos^2x+\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y}{\sin(x+y)}=1$，则 $x-y=$____________.

5. 已知两个命题，命题 p：函数 $f(x)=\log_a x\ (x>0)$ 单调递增；命题 q：函数 $g(x)=x^2+ax+1>0\ (x\in\mathbf{R})$. 若 $p\vee q$ 为真命题，$p\wedge q$ 为假命题，则实数 a 的取值范围为____________.

6. 设 S 是 $\left(0,\dfrac{5}{8}\right)$ 中所有有理数的集合，对简分数 $\dfrac{q}{p}\in S$（正整数 p,q 互质），定义函数 $f\left(\dfrac{q}{p}\right)=\dfrac{q+1}{p}$，则 $f(x)=\dfrac{2}{3}$ 在 S 中根的个数为____________.

7. 已知动点 P,M,N 分别在 x 轴上，圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 和圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=3$ 上，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为____________.

8. 已知棱长为 1 的正四面体 $P-ABC$，PC 的中点为 D，动点 E 在线段 AD 上，则直线 BE 与平面 ABC 所成的角的取值范围为____________.

9. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，$0<\lambda<1$. 若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}-(1-\lambda)\boldsymbol{c}|$ 所有取不到的值的集合为____________.

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 方程 $f(x)+2\sqrt{1-x^2}+|f(x)-2\sqrt{1-x^2}|-2ax-4=0$ 有三个实根 $x_1<x_2<x_3$. 若 $x_3-x_2=2(x_2-x_1)$，则实数 $a=$____________.

二、解答题

11. （本题满分 20 分）设 $f_1(x)=\sqrt{x^2+32}$，$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{16}{3}f_n(x)}$，$n=1,2,\cdots$. 对每个 n，求 $f_n(x)=3x$ 的实数解.

12.（本题满分 20 分）已知椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$的右焦点为 F，过 F 的直线 $y=k(x-2)$ 交椭圆于 P，Q 两点（$k\neq0$）．若 PQ 的中点为 N，O 为原点，直线 ON 交直线 $x=3$ 于 M．

（1）求$\angle MFQ$ 的大小；

（2）求 $\frac{PQ}{MF}$ 的最大值．

13.（本题满分 20 分）设数列$\{a_n\}$满足：$|a_{n+1}-2a_n|=2$，$|a_n|\leqslant2$，$n=1,2,3,\cdots$．

证明：如果 a_1 为有理数，则从某项后$\{a_n\}$为周期数列．

14.（本题满分 30 分）设 a_1,a_2,a_3；$b_1,b_2,b_3\in\mathbf{Z}^+$，证明：存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\{0,1,2\}$，使得 $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3$ 和 $\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\lambda_3b_3$ 同时被 3 整除．

15.（本题满分 30 分）设$\sigma=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列，记 $F(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}$，$a_{n+1}=a_1$，求 $\min\limits_{\sigma}F(\sigma)$．

2017年浙江省高中数学竞赛参考答案

一、填空题（每题8分，共80分）

1. 在多项式$(x-1)^3(x+2)^{10}$的展开式中x^6的系数为____.

解答： x^6系数为$2^7C_{10}^3-3\cdot2^6C_{10}^4+3\cdot2^5C_{10}^5-2^4C_{10}^6=-4128$.

2. 已知 $\log_{\sqrt{7}}(5a-3)=\log_{\sqrt{a^2+1}}5$，则实数 $a=$________.

解答 将原式化简为$\log_7(5a-3)=\log_{a^2+1}5$。由于$f(x)=\log_7(5x-3)$为$x>\dfrac{3}{5}$上的增函数，$g(x)=\log_5(x^2+1)$为$\mathbb{R}$上的增函数，且$f(2)=g(2)=1$ 。因此可得实数$a=2$.

3. 设$f(x)=x^2+ax+b$在$[0,1]$中有两个实数根，则a^2-2b的取值范围为______.

解答 因为$f(x)=x^2+ax+b=(x+\dfrac{a}{2})^2+b-\dfrac{a^2}{4}$在$[0,1]$中有两个实数根，所以$a,b$满足 $f(0)=b\ge0,f(1)=a+b+1\ge0,a^2-4b\ge0,0\le-\dfrac{a}{2}\le1$. 由此可得到$a^2-2b$的取值范围为 $[0,2]$。

4. 设 $x,y\in\mathbb{R}$，且$\dfrac{\sin^2x-\cos^2x+\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y}{\sin(x+y)}=1$，则$x-y=$______.

解答：由于 $\sin^2x-\cos^2x+\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y=\sin(x+y)\sin(x-y)$ 且$\sin(x+y)\ne0$，所以$\sin(x-y)=1$。故$x-y=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbb{Z}$。

5. 已知两个命题，命题p:函数$f(x)=\log_ax$ $(x>0)$单调递增；命题q:函数$g(x)=x^2+ax+1>0$ $(x\in\mathbb{R})$. 若$p\vee q$为真命题，$p\wedge q$为假命题，则实数a的取值范围为____________.

解答：命题p成立 当且仅当 $a>1$；命题q成立当且仅当 $-2<a<2$。若$p\vee q$为真命题，$p\wedge q$为假命题，则 $a\in(-2,1]\cup[2,+\infty)$.

6. 设 S 是 $(0,\frac{5}{8})$ 中所有有理数的集合，对简分数 $\frac{q}{p}\in S,(p,q)=1$，定义函数 $f(\frac{q}{p})=\frac{q+1}{p}$，则 $f(x)=\frac{2}{3}$ 在 S 中根的个数为 ________.

解答 由于 $f(x)=\frac{2}{3}$，令 $q=2m-1, p=3m$，$m\in\mathbb{Z}$，则有 $0<\frac{2m-1}{3m}<\frac{5}{8}$，$\frac{1}{2}<m<8$

由此检验可得 方程的根的个数为 5.

7. 已知动点 P，M，N 分别在 x 轴上，圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 和圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=3$ 上，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为________.

解答：圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的圆心坐标为（1,2），圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=3$ 关于 x 轴对称的圆的圆心坐标为（3，-4）.

则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 $\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2}-1-\sqrt{3}=2\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$ 。

8. 已知棱长为 1 的正四面体 $P-ABC$，PC 的中点为 D，动点 E 在线段 AD 上，则直线 BE 与平面 ABC 所成的角的取值范围为________.

解答：记 BC 中点为 O 点，以 O 为原点，BC 为 x 轴正向，OA 为 y 轴正向，建立空间直角坐标系，则 $A(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$B(-\frac{1}{2},0,0)$，$C(\frac{1}{2},0,0)$，$P(0,\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})$.

所以 $D(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{6}}{6})$。从而 可设 $E(\frac{1}{4}t,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{12}t,\frac{\sqrt{6}}{6}t)$ $(0\le t\le 1)$，

于是 $\overline{BE}=(\frac{1}{4}t+\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{12}t,\frac{\sqrt{6}}{6}t)$ 。设所求角为 θ，则

$\tan^2\theta=\frac{2t^2}{7t^2-12t+12}$。所以 $\cot^2\theta=6t^{-2}-6t^{-1}+\frac{7}{2}=6(t^{-1}-\frac{1}{2})^2+2\ge\frac{7}{2}$，

这里最后一个不等式是由于单调性以及 $t^{-1}\ge 1$ 。因此有 $0\le\tan\theta\le\frac{\sqrt{14}}{7}$，

即 $\theta\in[0,\arctan\frac{\sqrt{14}}{7}]$。

9. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3$，$0<\lambda<1$. 若 $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则 $|\vec{a}-\lambda\vec{b}-(1-\lambda)\vec{c}|$ 所有取<u>不到</u>的值的集合为____________.

解答 将向量 $\vec{b},\vec{c}$ 的起点平移至原点 O，再以 $\vec{b},\vec{c}$ 分别为 x,y 轴正向建立平面直角坐标系。则向量 $\lambda\vec{b}+(1-\lambda)\vec{c}$ 对应的点坐标为 $P(2\lambda,3(1-\lambda))$。

于是 $OP=\sqrt{13\lambda^2-18\lambda+9},OP_{\min}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$。而 $|\vec{a}-\lambda\vec{b}-(1-\lambda)\vec{c}|$ 表示的是点 P 到单位圆周上的距离 d，则 d 的最大值为 4，最小值为 $\dfrac{6}{13}\sqrt{13}-1$.因此所有取<u>不到</u>的值的集合为 $(-\infty,\dfrac{6}{13}\sqrt{13}-1)\cup(4,+\infty)$。

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}-2x, x<0,\\ x^2-1, x\geq 0,\end{cases}$ 方程 $f(x)+2\sqrt{1-x^2}+\left|f(x)-2\sqrt{1-x^2}\right|-2ax-4=0$ 有三个根 $x_1<x_2<x_3$. 若 $x_3-x_2=2(x_2-x_1)$，则实数 $a=$__________。

解答：设 $g(x)=2\sqrt{1-x^2}$，定义域为 $-1\leq x\leq 1$，

$\max f(x),g(x))=\dfrac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right)$.

方程可变形为 $\max(f(x),g(x))=ax+2$. 由 $-2x\geq 2\sqrt{1-x^2}$ 得 $x\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而有

$$\max(f(x),g(x))=\begin{cases}-2x, & x\in[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]\\ 2\sqrt{1-x^2} & x\in[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1]\end{cases}。$$

于是 $-2x=ax+2\Rightarrow x=-\dfrac{2}{a+2}$ $(-1\leq x\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，可得 $0\leq a\leq 2\sqrt{2}-2$；

$2\sqrt{1-x^2}=ax+2\Rightarrow x=0,x=-\dfrac{4a}{a^2+4}$。由于 $x_1<x_2<x_3,x_3-x_2=2(x_2-x_1)$，可得 $2x_1=3x_2$，即 $\dfrac{4}{a+2}=\dfrac{12a}{a^2+4}$，有 $a=\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$.

二、解答题

11．（本题满分 20 分）设 $f_1(x)=\sqrt{x^2+32}$，$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}f_n(x)}$，$n=1,2,\cdots$．对每个 n，求 $f_n(x)=3x$ 的实数解.

证明：利用数学归纳法.

(1) $x=2$ 是 $f_n(x)=3x$ 的解. ……………………………………………………5 分

当 n =1 时，$x=2$ 是 $f_1(x)=\sqrt{x^2+32}=3x$ 的解。

当 n = k 时，设 $f_k(2)=6$，则 $f_{k+1}(2)=\sqrt{4+\frac{16}{3}f_k(2)}=6$。

由此可得 $x=2$ 是 $f_n(x)=3x$ 的解（对于所有的 n）． ……………………………10 分

(2) 当 $x>2$ 时，$f_n(x)<3x<\frac{3}{2}x^2$.

当 n =1 时，$f_1(x)=\sqrt{x^2+32}<3x<\frac{3}{2}x^2$（$x>2$）．

当 n = k 时，设 $f_k(x)<3x<\frac{3}{2}x^2$，则 $f_{k+1}(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}f_k(x)}<\sqrt{x^2+8x^2}=3x$。

由此可得 $x>2$ 都不是 $f_n(x)=3x$ 的解（对于所有的 n） ……………………………15 分

(3) 当 $0<x<2$ 时，$f_n(x)>3x$.

当 n =1 时，$f_1(x)=\sqrt{x^2+32}>\sqrt{x^2+8x^2}=3x$（$0<x<2$）．

当 n = k 时，设 $f_k(x)>3x$，则 $f_{k+1}(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}f_k(x)}>\sqrt{x^2+16x}>3x$。

由此可得 $0<x<2$ 都不是 $f_n(x)=3x$ 的解（对于所有的 n）．

因此，对每个 n，$f_n(x)=3x$ 的实数解为 $x=2$。 ……………………………………20 分

12.（本题满分 20 分）已知椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$的右焦点为$F$，过$F$的直线$y=k(x-2)$交椭圆于$P,Q$两点（$k\neq 0$）．若$PQ$的中点为$N$，$O$为原点，直线$ON$交直线$x=3$于$M$．

（1）求$\angle MFQ$ 的大小；　　（2）求 $\dfrac{PQ}{MF}$ 的最大值.

解答：（1）联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，可得 $(3k^2+1)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$．

设 P 点的坐标为(x_p,y_p)，Q 点的坐标为(x_q,y_q)，则

$$x_p+x_q=\frac{12k^2}{3k^2+1},x_px_q=\frac{12k^2-6}{3k^2+1}.$$ ……………………5 分

于是有 $y_p+y_q=k(x_p+x_q)-4k=\dfrac{-4k}{3k^2+1}$。

因为PQ的中点为N，所以$N(\dfrac{6k^2}{3k^2+1},\dfrac{-2k}{3k^2+1})$。因此$ON$的斜率为$k_{ON}=-\dfrac{1}{3k}$。

因为直线ON交直线$x=3$于M，所以$M(3,-\dfrac{1}{k})$。故 MF 的斜率为$k_{MF}=-\dfrac{1}{k}$，

即得 $k_{MF}\cdot k_{PQ}=-1$。因此 MF 与 PQ 垂直，$\angle MFQ=\dfrac{\pi}{2}$。……………10 分

（2）$I=\left(\dfrac{PQ}{MF}\right)^2=\dfrac{(x_p-x_q)^2+k^2(x_p-x_q)^2}{1+\dfrac{1}{k^2}}=k^2(x_p-x_q)^2=k^2[(x_p+x_q)^2-4x_px_q]$

$$=k^2[\frac{144k^4}{(3k^2+1)^2}-24\frac{2k^2-1}{3k^2+1}]=24k^2\frac{k^2+1}{(3k^2+1)^2}$$ ………………15 分

令$u=3k^2+1$，则 $I=8\dfrac{(u-1)(u+2)}{3u^2}=-\dfrac{16}{3}(\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{2u}-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{16}{3}[(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{16}]$

由于$u=3k^2+1>1$，故$0\le\dfrac{1}{u}<1$。

因此$I_{\max}=3$（当$u=4$时取到最大值，也即$k=\pm1$）。

综上所述，$\dfrac{PQ}{MF}$ 的最大值为$\sqrt{3}$. ……………………………………………20 分

13.（本题满分 20 分）设数列$\{a_n\}$满足：$|a_{n+1}-2a_n|=2$，$|a_n|\le 2$, $n=1,2,3,\cdots$.

证明：如果a_1为有理数，则从某项后$\{a_n\}$为周期数列.

证：（1）若a_1为有理数，则$\{a_n\}$为一个有理数数列.

(2) 对于任意的 n，设$a_n=\frac{y}{x},(y,x)=1$，由已知条件，有且仅有下述一个等式成立

$$a_{n+1}=2a_n+2=\frac{2y+2x}{x}\text{，或 }a_{n+1}=2a_n-2=\frac{2y-2x}{x}.\qquad(*)$$

a_n 与 a_{n+1}有相同的分母（不进行约分）. ……………………5 分

(3) 设 $a_1=\frac{q}{p},(p,q)=1$，则$a_n=\frac{b_n}{p}$，b_n为整数。由于$|a_n|\le 2$, $n=1,2,3,\cdots$，因此

$$-2p\le b_n\le 2p.$$ ……………………………………………10 分

(4) 若存在两个自然数$k<l$，使得$a_k=a_l$. 则由(2)中得到的(*)递推公式以及$|a_n|\le 2$, $n=1,2,3,\cdots$，可得$\{a_n\}$ 从第 k 项开始是一个周期数列，周期为$l-k$. ……………………………………………15 分

(5) 由(3)可知对于任意的 n，b_n的值只有$4p+1$（有限个），故总能找到$k<l$，使得$b_k=b_l$，从而有$a_k=a_l$.

综合上述，如果a_1为有理数，则从某项后$\{a_n\}$为周期数列. ……………20 分

14.（本题满分 30 分）设 $a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3\in Z^+$，证明：存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\{0,1,2\}$，使得 $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3$ 和 $\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\lambda_3b_3$ 同时被 3 整除.

证明：不妨设 $a_i\equiv k_i(\bmod 3),b_i\equiv l_i(\bmod 3)$，$k_i,l_i\in\{0,1,2\}$，$i=1,2,3$. 则要证明结论正确，只要证明存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\{0,1,2\}$，使得

$$\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\lambda_3k_3\equiv\lambda_1l_1+\lambda_2l_2+\lambda_3l_3(\bmod 3)\equiv 0(\bmod 3)。\qquad (*)$$

记 $k_1l_2-k_2l_1\equiv c(\bmod 3)$, 这里 $c\in\{0,1,2\}$。

情形（1） 当 $c=0$ 时，则 $k_1=l_1=0$, 或者 k_1,l_1 不全为零。

若 $k_1=l_1=0$, 则取 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=0$，有(*) 式成立.

若 k_1,l_1 不全为零，不妨设 $k_1\neq 0$, 则取 $\lambda_1=k_2,\lambda_2=-k_1,\lambda_3=0$，且

$$\begin{cases}\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\lambda_3k_3=k_2k_1-k_1k_2\equiv 0(\bmod 3)\\ \lambda_1l_1+\lambda_2l_2+\lambda_3l_3=k_2l_1-k_1l_2\equiv 0(\bmod 3)\end{cases}$$，即（*）式。 …………………20 分

情形（2） 当 $c=1$ 或 2 时，即 $c^2\equiv 1(\bmod 3)$。

记 $c(k_2l_3-k_3l_2)\equiv c_1(\bmod 3),c(k_3l_1-k_1l_3)\equiv c_2(\bmod 3)$, 这里 $c_1,c_2\in\{0,1,2\}$。

令 $\lambda_1=c_1,\lambda_2=c_2,\lambda_3=1$，则 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\{0,1,2\}$ 且不全为零，且

$$\begin{aligned}\lambda_1k_1+\lambda_2k_2+\lambda_3k_3&=c_1k_1+c_2k_2+k_3\\&\equiv c(k_2l_3-k_3l_2)k_1+c(k_3l_1-k_1l_3)k_2+k_3\ (\bmod 3),\\&\equiv ck_3\left(k_2l_1-k_1l_2\right)+k_3\ (\bmod 3),\\&\equiv(1-c^2)k_3\ (\bmod 3)\equiv 0\ (\bmod 3),\end{aligned}$$ …………………30 分

类似可以证明 $\lambda_1l_1+\lambda_2l_2+\lambda_3l_3\equiv 0(\bmod 3)$。

综上所述，可以取到不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\{0,1,2\}$，使得(*)式成立.

15.（本题满分 30 分）设 $\sigma=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ 为 $\{1,2,\dots,n\}$ 的一个排列，记 $F(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}$，$a_{n+1}=a_1$，求 $\min_{\sigma}F(\sigma)$.

解答：问题等价于圆周上放置 n 个数，使得相邻数的乘积之和为最小，最小值记为 T_n .

不妨设 $a_1=n$，则数字 1 必与它相邻。否则设 $a_j=1,(j\neq 2,n)$，则可将 $a_2,a_3,\cdots,a_j$ 的数字改变为 $a_j,a_{j-1},\cdots,a_2$ 上的数字,则相邻数的乘积和的该变量为

$$a_1a_j+a_2a_{j+1}-a_1a_2-a_ja_{j+1}=(a_1-a_{j+1})(a_j-a_2)<0.$$

于是可确定 $a_2=1$。再说明数字 2 也必与数字 n 相邻，即 $a_n=2$。…………10 分

事实上，若 $a_j=2,(j\neq n)$，则交换 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_j$ 为 $a_j,a_{j+1},\cdots,a_n$。此时的目标改变值为

$$a_1a_j+a_na_{j-1}-a_1a_n-a_ja_{j-1}=(a_1-a_{j-1})(a_j-a_n)<0.$$

因此目标取到最小值时，$a_1=n,a_2=1,a_n=2$。由此出发，依次可得

$a_3=n-1,a_{n-1}=n-2$。在已安排好的两端数字，若剩下的数比两端数字都小，则在剩下的数中找两个最小的数字，按小对大，大对小放置；若剩下的数比两端数字大，则在剩下的数字中找两个最大的数，按大对小，小对大放置。由此规律即得 $a_4=3,a_{n-2}=4$，$a_5=n-3,a_{n-3}=n-4,\cdots$。 ……………………20 分

下面用递推法计算 T_n。

考虑 n+2 个数字，我们在T_n的数字排序中，将每个数字加 1，再放置 1，n+2 这两个数字，在 2，n+1 的中间插入 n+2,1.即可得到T_{n+2}。

因此

$$T_{n+2}=T_n'+(n+1)+(n+2)+2(n+2)-2(n+1)$$

其中$T_n'=\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)(a_{i+1}+1)=T_n+n(n+2)$。 由此可得

$$T_{n+2}=T_n+n^2+4n+5.$$

可以推出

$$T_n=\begin{cases}\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n-1, & n=2m\\ \frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{5}{6}n-\frac{1}{2}, & n=2m-1\end{cases}$$ 。……………………30 分