

2017年全国高中数学联合竞赛湖北省预赛试题参考答案和评分标准  
(高一年级)

说明:

1. 评阅试卷时, 请依据本评分标准. 填空题只设9分和0分两档; 其他各题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题中5分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、填空题(本大题共10小题, 每小题9分, 共90分.)

1. 已知非空集合  $A = \{x \mid m+1 \leq x \leq 2m-1\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$ , 且  $A \subseteq B$ , 则实数  $m$  的取值范围是  $[2, 3]$ .

2. 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_6 + a_5 + a_4 - a_3 - a_2 - a_1 = 49$ , 则  $a_9 + a_8 + a_7$  的最小值为 196.

3. 设函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 其中  $a, b, c$  为互不相同的非零整数, 且  $f(a) = a^3$ ,  $f(b) = b^3$ , 则  $a + b + c =$  18.

4. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 若  $\frac{\cos A}{a} = \frac{3\cos B}{b} = \frac{4\cos C}{c}$ , 则  $\tan A =$   $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

5. 设函数  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , 则该函数图象上整点的个数为 3.

6. 已知  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心,  $D$  为  $BC$  的中点, 若  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$ ,  $BC = 2\sqrt{6}$ , 则  $AD =$   $\sqrt{2}$ .

7. 已知正实数  $a, b$  满足  $ab(a+b) = 4$ , 则  $2a+b$  的最小值为  $2\sqrt{3}$ .

8. 设  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则  $P = (x+1-\cos y)^2 + (x-1+\sin y)^2$  的最小值为  $3-2\sqrt{2}$ .

9. 若关于  $x$  的方程  $\frac{|x|}{x+1} = kx^2$  恰有两个不同的实数根, 则实数  $k$  的取值范围为  $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$ .

10. 将与 70 互素的所有正整数从小到大排成数列, 这个数列的第 2017 项为 5881.

二、解答题(本题满分 60 分, 每小题 20 分.)

11. 求实数  $a$  的取值范围, 使不等式

$$\sin 2\theta - 2\sqrt{2}a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}a}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} > -3 - a^2$$

对  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  恒成立.

解 设  $x = \sin \theta + \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , 则  $x \in [1, \sqrt{2}]$ ,  $\sin 2\theta = x^2 - 1$ ,

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

故原不等式可化为  $x^2 - 2ax - \frac{2a}{x} + 2 + a^2 > 0$ , 即

$$(a-x)[a-(x+\frac{2}{x})] > 0 \quad \text{①} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

记  $f(x) = x + \frac{2}{x}$ , 可知  $f(x)$  在  $[1, \sqrt{2}]$  上单调递减, 故  $[f(x)]_{\max} = f(1) = 3$ .

若  $1 \leq a \leq 3$ , 则当  $x=1$  时, 不等式①不成立, 不符合题设条件.  $\cdots \cdots 15 \text{ 分}$

若  $a < 1$  或  $a > 3$ , 则对一切  $x \in [1, \sqrt{2}]$ ,  $a-x$  与  $a-(x+\frac{2}{x})$  同号, 可知不等式①恒成立, 符合题意.

因此, 所求实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .  $\cdots \cdots 20 \text{ 分}$

12. 已知函数  $f(x) = x^2 + (a-2)x + a$ ,  $g(x) = |x-a|$ , 其中  $a > 0$ .

(1) 设  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 判断函数  $h(x)$  的单调性;

(2) 如果函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的图象恰有三个交点, 求  $a$  的取值范围.

解 (1)  $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + (a-2)x + a - |x-a| = \begin{cases} x^2 + (a-3)x + 2a, & x \geq a, \\ x^2 + (a-1)x, & x < a. \end{cases}$

函数  $y = h(x)$  的图象为抛物线  $y = x^2 + (a-3)x + 2a$  在  $x=a$  右侧的部分和抛物线  $y = x^2 + (a-1)x$  在  $x=a$  左侧的部分构成, 两个分支的函数图象在  $x=a$  处是连续的.

两条抛物线的对称轴分别为  $x_1 = \frac{3-a}{2}$  和  $x_2 = \frac{1-a}{2}$ , 又  $a > 0$ , 故  $\frac{1-a}{2} < \frac{3-a}{2}$ .

$\cdots \cdots 5 \text{ 分}$

①若  $a \leq \frac{1-a}{2}$ , 即  $0 < a \leq \frac{1}{3}$  时, 则  $h(x)$  在  $(-\infty, \frac{3-a}{2})$  上递减, 在  $(\frac{3-a}{2}, +\infty)$  上递增;

②若  $\frac{1-a}{2} < a < \frac{3-a}{2}$ , 即  $\frac{1}{3} < a < 1$  时, 则  $h(x)$  在  $(-\infty, \frac{1-a}{2})$  上递减, 在  $(\frac{1-a}{2}, a)$  上递增, 在  $(a, \frac{3-a}{2})$  上递减, 在  $(\frac{3-a}{2}, +\infty)$  上递增.

③若  $a \geq \frac{3-a}{2}$ , 即  $a \geq 1$  时,  $h(x)$  在  $(-\infty, \frac{1-a}{2})$  上递减, 在  $(\frac{1-a}{2}, +\infty)$  上递增.

$\cdots \cdots 10 \text{ 分}$

(2) 如果函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的图象恰有三个交点, 则函数  $h(x)$  恰有三个零点. 结合 (1) 的结论可知应该有:  $\frac{1}{3} < a < 1$  且  $h(\frac{1-a}{2}) < 0$ ,  $h(a) = 0$ ,  $h(\frac{3-a}{2}) < 0$ .

$\cdots \cdots 15 \text{ 分}$

由  $h(a) = 0$  得  $a^2 + (a-3)a + 2a = 0$ , 解得  $a = \frac{1}{2}$  ( $a=0$  舍去), 此时

$$h(\frac{1-a}{2}) = h(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2}-1) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{16} < 0,$$

$$h(\frac{3-a}{2}) = h(\frac{5}{4}) = (\frac{5}{4})^2 + (\frac{1}{2}-3) \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{16} < 0,$$

符合要求.

因此,  $a = \frac{1}{2}$ .  $\cdots \cdots 20 \text{ 分}$

13. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 其中

$$a_n = \begin{cases} n \cdot 2^{n-1}, & n \text{ 为偶数}, \\ (n+\lambda) \cdot 2^{n-1}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

(1) 求  $S_n$ ; (2) 若  $\lambda \in (-2017, -2016)$ , 求  $S_n$  取得最小值时对应的  $n$  的值.

解 (1)  $a_n = n \cdot 2^{n-1} + \frac{\lambda}{2} [2^{n-1} - (-2)^{n-1}]$ .

记  $T_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$ , 则  $2T_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$ ,

$\therefore T_n = n \cdot 2^n - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = (n-1) \cdot 2^n + 1$ . .....5 分

又  $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ,

$$1 + (-2) + (-2)^2 + \cdots + (-2)^{n-1} = \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \frac{1}{3} [1 - (-2)^n],$$

$$\text{故 } S_n = T_n + \frac{\lambda}{2} \cdot (2^n - 1) + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{3} [1 - (-2)^n] = (n-1) \cdot 2^n + 1 + \frac{\lambda}{6} [3 \cdot 2^n - (-2)^n - 2].$$

.....10 分

(2) 注意到  $a_{2n} > 0$ , 故  $S_n$  取得最小值时必有  $n$  为奇数.

而  $S_{2k+1} - S_{2k-1}$

$$= 2k \cdot 2^{2k+1} - (2k-2) \cdot 2^{2k-1} + \frac{\lambda}{6} \cdot [3 \cdot (2^{2k+1} - 2^{2k-1}) - (-2)^{2k+1} + (-2)^{2k-1}]$$

$$= (3k+1+\lambda) \cdot 2^{2k}.$$

令  $S_{2k+1} - S_{2k-1} > 0$ , 即  $(3k+1+\lambda) \times 2^{2k} > 0$ , 得  $k > -\frac{1+\lambda}{3}$ . .....15 分

又由  $\lambda \in (-2017, -2016)$  知  $-\frac{1+\lambda}{3} \in (\frac{2015}{3}, 672)$ , 所以  $k \geq 672$ ;

同理, 令  $S_{2k+1} - S_{2k-1} < 0$ , 即  $(3k+1+\lambda) \times 2^{2k} < 0$ , 得  $k < -\frac{1+\lambda}{3}$ , 所以  $k \leq 671$ .

因此, 当  $S_n$  取得最小值时,  $n = 2 \times 671 + 1 = 1343$ . .....20 分